Indhold

Indledning

Det overordnede formål med dette bachelorprojekt er at prøve at forstå noget af matematikken bag den vel nok mest berømte fysiske teori, den generelle relativitetsteori.

Min baggrund for at skrive om emnet er to kurser, et i riemannsk geometri og et i de Rham kohomologi.

Ud fra mine forudsætninger lavede vi en mere detaljeret projektbeskrivelse. I denne beskrivelse var der tre formål med opgaven.

Det første var, at blive fortrolig med det mest elementære tensoralgebra. Dette er totalt udeladt af projektet, da det ellers ville blive uoverskueligt langt. Det andet var, at udvide de vigtigste begreber fra riemannsk geometri til pseudoriemannske mangfoldigheder. Det tredje formål med opgaven var, at få givet de vigtigste definitioner og resultater fra relativitetsteorien, samt at finde nødvendige og tilstrækkelige betingelser på metrikken g for, at produktet $(I \times S^1 \times S^2, g)$ er en løsning til feltligningen i vacuum.

Tak til vejleder Marcel Bökstedt og til dem, der har læst korrektur.

Kapitel 1

Pseudoriemannsk geometri

Formålet med dette kapitel er, at få de vigtigste begreber fra riemannsk geometri udvidet til pseudoriemannske mangfoldigheder. Metriktensoren og de vigtigste krumningsbegreber vil blive behandlet, og til sidst vil de vigtigste definitioner fra den almene relativitetsteori blive givet.

Igennem hele projektet vil Einsteins summations konvention blive brugt.

1.1 Metriktensoren

Vi starter med at definere, hvad den pseudoriemannske struktur er.

Definition 1.1.1. En pseudoriemannsk metrik på en glat mangfoldighed M er et symmetrisk, ikke degenereret $(2,0)$-tensorfelt, g, på M af konstant indeks.

Bemærkning 1.1.2. I en kortomegn kan $g \in T^2_0(M)$ skrives som

$$g = \sum g_{ij} dx^i \otimes dx^j.$$

Vi ønsker at bestemme koefficienterne g_{ij}. Det gøres på følgende måde:

$$g(\partial_k, \partial_l) = \sum g_{ij} dx^i(\partial_k) dx^j(\partial_l) = \sum g_{ij} \delta^i_k \delta^j_l = g_{kl},$$

hvor δ^i_k er Kronecker deltaet. Da g er symmetrisk, er $g_{ij} = g_{ji}$.

At g ikke er degenereret betyder, at matricen $\underline{g}(p) = \{g_{ij}(p)\}$ er invertibel for alle $p \in M$. g skal have konstant indeks; dette betyder at matricen $\underline{g}(p)$ har det samme antal negative egenværdier for alle $p \in M$. g er glat i den forstand, at koefficienterne $g_{ij} \in C^\infty(U)$ varierer glat med p. Da g er et tensorfelt på M, inducerer g en ny bilineær form

$$g_p \colon T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}, \text{ hvor } g(-,-)(p) = g_p(-,-).$$

Dette betyder, at vi nu har defineret en symmetrisk bilineær form på hvert T_pM, $p \in M$, og dermed har vi gjort T_pM til at skalarproduktrum. Det er standard at skrive $g_p(-,-) = \langle -,- \rangle_p = \langle -,- \rangle$.

Beviserne for disse små påstande kan findes i [ONe83].

Vi kan nu definere en vektors *kausale karakter*.

Definition 1.1.3. Lad $v \neq 0 \in T_pM$. v kaldes

- spacelike hvis $g(v,v) > 0$
- timelike hvis $g(v,v) < 0$
- lightlike eller null hvis $g(v,v) = 0$

Proposition 1.1.4. *Metrikken bestemmer en entydig isomorfi*

$$g_\uparrow \colon T_1^0(M) \twoheadrightarrow T_0^1(M)$$

givet ved $g_\uparrow(v) = g(v,-)$

Bevis. Vi ønsker at konstruere en afbildning $g_\uparrow \colon T_1^0(M) \twoheadrightarrow T_0^1(M)$, der tager en vektor $v \in T_pM$ og giver en 1-form i T_p^*M. Definer en 1-form $g_\uparrow(v) = g(v,-)$. For basisvektorer $\{\partial_1, \dots, \partial_n\}$ og $\{dx^1, \dots, dx^n\}$ fås

$$g_\uparrow(v) = \sum g(v, \partial_i) dx^i.$$

Hvis $v = \partial_j$ haves

$$g_\uparrow(\partial_j) = \sum g_{ji} dx^i.$$

Den inverse afbildning $g_\downarrow \colon T_0^1(M) \twoheadrightarrow T_1^0(M)$ defineres analogt, og for basisvektorer fås $g_\downarrow(dx^i) = \sum g^{ji}\partial_j$. $g_\uparrow$ er injektiv, da g ikke er degenereret. Da $g_\uparrow$ er lineær, er den surjektiv og dermed er de to afbildninger isomorfier. □

Bemærkning 1.1.5. Vi vil i det efterfølgende bruge notationen $\sim$ for metrisk ækvivalens, det vil sige, at

$$dx^i \sim \sum g^{ij}\partial_j \quad \text{og} \quad \partial_j \sim \sum g_{ji} dx^i.$$

Senere får vi brug for at vide, hvad der menes med en ortonormalbasis, hvis metrikken er indefinit.

Definition 1.1.6. Lad V være et vektorrum udstyret med et indefit skalarprodukt. Da er $\{e_1, \dots, e_n\} \in V$ en ortonormalbasis hvis $\text{span}(e_1, \dots, e_n) = V$, $e_i \perp e_j$ og e_i har længde 1 eller i.

Definition 1.1.7. Et Minkowski rum er det euklidisk rum $\mathbb{R}^n$ udstyret med metrikken $g = -dx^i \otimes dx^i + \sum_{i=2}^n dx^i \otimes dx^i$. Minkowskirummet betegnes $\mathbb{R}_1^n$.

Definition 1.1.8. En pseudoriemannsk mangfoldighed er en glat mangfoldighed M udstyret med en metriktensor af konstant indeks, ν. Hvis $\nu = 0$, kaldes M riemannsk og, hvis $\nu = 1$, kaldes M Lorentz.

Definition 1.1.9. En konnektion på en glat mangfoldighed M er en afbildning

$$\nabla\colon \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M),$$

der opfylder følgende

1. $\nabla_{X_1+X_2} Y = \nabla_{X_1} Y + \nabla_{X_2} Y$
2. $\nabla_X (Y_1 + Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2$
3. $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y, \qquad f \in C^\infty(M)$
4. $\nabla_X (fY) = f(\nabla_X Y) + X(f)Y, \qquad f \in C^\infty(M)$

Bemærkning 1.1.10. I det pseudoriemannske tilfælde er der også præcis en pseudoriemannsk konnektion hørende til den pseudoriemannske metrik, Levi-Civita konnektionen, der er torsionsfri og kompatibel med metrikken. Beviset kan ses i [ONe83, Theorem 11] og [Dup93, Theorem 2.16]; det bemærkes, at det undervejs benyttes, at $\underline{g}$ er invertibel, det er stadigt rigtigt, da g ikke er degenereret. Der er også i dette tilfælde en sammenhæng mellem konnektionen og metrikken, der i lokale koordinater er givet ved ligningerne

$$\begin{aligned} \sum \Gamma_{ij}^l \partial_l &= \nabla_{\partial_i}(\partial_j), \\ \sum \Gamma_{ij}^l g_{lk} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{lk}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}\right). \end{aligned}$$

Γ_{ij}^k er glatte funktioner på M.

1.2 Krumning af pseudoriemannske mangfoldigheder

Et essentielt emne i riemannsk geometri er krumning. Vi ønsker derfor at få dette begreb udvidet til pseudoriemannske mangfoldigheder. Det meste kører efter samme melodi som i det riemannske tilfælde, men som vi vil se, er der små, men væsentlige forskelle. Vi begynder med en fundamental definition.

Definition 1.2.1. Riemanns krumningstensor

$$R\colon \mathfrak{X}^3(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

er defineret ved

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M),$$

hvor $[X,Y]$ er Lie-parentesen af X, Y.

Bemærkning 1.2.2. Da R er multilineær over $C^\infty(M)$, se [Pet97, Proposition 2.2.1], er R en tensor af type $(3,1)$. R kan i lokale koordinater skrives som

$$R = \sum R^l_{ijk} dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes \partial_l,$$

hvor koefficienterne R^l_{ijk} bestemmes fra formlen $R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = \sum R^l_{ijk}\partial_l$. $R^l_{ijk}(p)$ varierer ifølge [Dup93, lemma 5.18] glat med p, idet Christoffelsymbolerne er glatte funktioner.

Ud fra R og metrikken definerer vi en ny afbildning $Rm \in T^4_0(M)$ ved

$$Rm(X, Y, Z, W) = \langle R(X, Y)Z, W\rangle.$$

Hvis man skriver det som tensorer, svarer det til, at vi anvender isomorfien $g_\uparrow$ fra bemærkning 1.1.4 til at hæve det sidste indeks, og som tensor kommer Rm til at se ud som

$$Rm = \sum R_{ijkl} dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes dx^l,$$

hvor koefficienterne $R_{ijkl} = \sum g_{lm} R^m_{ijk}$, ifølge bemærkning 1.1.4.

Senere skal vi gøre brug af en anden og ækvivalent beskrivelse af Rm. Definer en delmængde af $T^0_2(M)$ kaldet $\Lambda^2(M)$ ved

$$\Lambda^2(M) = \{A \in T^0_2(M) \mid A(\theta_1, \theta_2) = -A(\theta_2, \theta_1)\}.$$

Det vil sige, at $\Lambda^2(M)$ er mængden af antisymmetriske $(0,2)$-tensorfelter på M. Inden for en kortomegn er $\Lambda^2(U)$ et frit undermodul af $T^0_2(U)$ med basis $\{\partial_i \otimes \partial_j\} = \{\partial_i \wedge \partial_j\}$, $i < j$.

Lad Grassmanns indre produkt, g_G, på $\Lambda^2(M)$ være givet ved

$$g_G(X \wedge Y, V \wedge W) = g(X, V)g(Y, W) - g(X, W)g(Y, W).$$

Symmetrirelationerne, [Dup93, Proposition 5.1], for Rm gør, at vi kan definere

$$Rm\colon \Lambda^2(M) \times \Lambda^2(M) \to C^\infty(M)$$

ved

$$Rm(X \wedge Y, V \wedge W) = Rm(X, Y, W, V).$$

Ud fra denne formel kan vi definere krumningsoperatoren

$$\mathfrak{R}\colon \Lambda^2(M) \to \Lambda^2(M)$$

ved

$$g_G(\mathfrak{R}(X \wedge Y), V \wedge W) = Rm(X \wedge Y, V \wedge W).$$

Denne definition kræver åbenlyst, at g_G ikke er degenereret; dette følger af [MT97, Addendum 16.8].

Da R er en (3,1) tensor, kan vi benytte benytte kontraktionen til at danne en ny tensor.

Definition 1.2.3. Ricci tensoren Ric defineres som $Ric = C(R)$, hvor C er kontraktionen på de to sidste indices. I lokale koordinater fås

$$Ric = \sum R_{ij} dx^i \otimes dx^j.$$

Vi benytter isomorfien $\mathrm{id} \otimes g_\downarrow \colon T_0^2(M) \to T_1^1(M)$ til at omdanne Ric til en (1,1) tensor, $\widetilde{Ric}$. I lokale koordinater er $\widetilde{Ric}$ givet ved

$$\widetilde{Ric} = \sum R_i^j dx^i \otimes \partial_j,$$

hvor $R_i^j = \sum g^{ji} R_{ij}$ idet $dx^j \sim \sum g^{ji} \partial_i$, jævnfør bemærkning 1.1.4.

Riccitensoren kan også defineres på følgende måde. Lad $\{e_1, \ldots, e_n\}$ være en ortonormalbasis for T_pM. Da gælder for $v \in T_pM$, at

$$Ric(v) = \sum R(v, e_i) e_i.$$

Det vil sige, at Riccitensoren er sporet af krumningstensoren. Beviset for, at de to definitioner er ækvivalente, overspringes.

Definition 1.2.4. Skalarkrumningen S defineres som $S = C(\widetilde{Ric})$, hvor C er kontraktionen på de to indices. Det vil sige, at $S = \sum g^{ji} R_{ij}$.

Bemærkning 1.2.5. Vi minder om definitionen af snitkrumningen fra riemannsk geometri. Hvis M er en riemannsk mangfoldighed med krumningstensor R og $S = \mathrm{span}(x, y)$ er et to-plan i T_pM, er snitkrumningen

$$K_p(S) = -\frac{Rm(x, y, x, y)}{|x \wedge y|^2}.$$

Endvidere har vi, at snitkrumningen er uafhængig af valg af x og y, jævnfør [Dup93, Proposition 5.9].

Denne definition er klart ikke veldefineret, hvis enten x eller y er lightlike vektorer i T_pM. Definer en kvadratisk form ved $Q(v, w) = \langle v, v\rangle\langle w, w\rangle - \langle v, w\rangle^2$. I tilfældet med en positiv definit metrik har vi at $Q(v, w) = |v \wedge w|^2$. Lad $S = \mathrm{span}(v, w)$ være et ikke-degenereret to-plan i T_pM, dvs. $Q(v, w) \neq 0$. Nu kan vi definere snitkrumningen for pseudoriemannske mangfoldigheder

$$K_p(S) = -\frac{Rm(v, w, v, w)}{Q(v, w)} = \frac{g_G(\mathfrak{R}(v \wedge w), v \wedge w)}{Q(v, w)}.$$

Hvor fortegnet forsvinder på grund af symmetrirelationerne Rm. $K_p(S)$ er uafhængig af valg af v, w når blot $\mathrm{span}(v, w)$ ikke er degenereret. Vi har brug for følgende lemma, der gør os istand til at beregne K_pS selv om v eller w er lightlike.

Lemma 1.2.6. *Lad v, w være vektorer i et skalarprodukt rum og lad $S = \operatorname{span}(v, w)$ da eksisterer $\bar{v}, \bar{w}$ vilkårligt tæt på henholdsvis v og w så $\operatorname{span}(\bar{v}, \bar{w})$ er ikke-degenereret, det vil sige $Q(v, w) \neq 0$.*

Bevis. Se [ONe83, Lemma 40]. □

Følgende proposition giver alene ud fra $\mathfrak{R}$ et estimat af snitkrumningen. Den giver desuden også nyttig information om, hvornår man kan forvente, at Ric og $\mathfrak{R}$ er diagonale.

Proposition 1.2.7. *Lad $\{e_i\}$ være en ortonormalbasis for T_pM.*

1. *Antag at $\{e_i \wedge e_j\}$, $i < j$ diagonaliserer $\mathfrak{R}$, det vil sige at $\mathfrak{R}(e_i \wedge e_j) = \lambda_{ij} e_i \wedge e_j$. Da er $K_pS \in [\min \lambda_{ij}, \max \lambda_{ij}]$.*
2. *Antag at $R(e_i, e_j)e_k = 0$ for i, j, k forskellige. Da diagonaliserer $e_i \wedge e_j$, $i < j$, $\mathfrak{R}$.*
3. *Antag at $g(R(e_i, e_j)e_k, e_l) = 0$ for tre indices forskellige. Da diagonaliserer e_i Ric.*

Bevis. Bevis for (1). I definitionen af K_pS er $Q(e_i, e_j) = 1$, da $\{e_i\}$ er en ortonormalbasis. Påstanden følger nu direkte fra definitionen af K_pS i bemærkning 1.2.5.

Bevis for (2). Ifølge bemærkning 1.2.2 og symmetrirelationerne for Rm, [Dup93, Proposition 5.1], er

$$\begin{aligned} g_G(\mathfrak{R}(e_i \wedge e_j), e_k \wedge e_l) &= -g(R(e_i, e_j)e_k, e_l) \\ &= g(R(e_i, e_j)e_l, e_k). \end{aligned}$$

$g(R(e_i, e_j)e_l, e_k) = 0$ hvis $\{i, j, k\} = \{i, j, l\}$ per antagelse. Dermed har vi, at $g(R(e_i, e_j)e_l, e_k) \neq 0 \iff \{i, j\} = \{k, l\}$. $g_G(\mathfrak{R}(e_i \wedge e_j), e_k \wedge e_l) = g_G(\mathfrak{R}(e_i \wedge e_j), e_i \wedge e_j)$. Da $\{e_i\}$ er en ortonormalbasis for T_pM, er $\{e_i \wedge e_j\}$ ortonormalbasis for Λ^2. Resultatet følger nu, idet g_G ikke er degenereret.

Beviset for (3) kører efter samme melodi og udelades. □

1.3 Relativitetsteori

Nu har vi sådan set de tekniske ting på plads der gør os i stand til at skrive feltligningen op. Før det sker, har vi et par fundamentale definitioner.

Definition 1.3.1. En Lorentz mangfoldighed kaldes tidsorienterbar, hvis der eksisterer et timelike vektorfelt $X \in \mathfrak{X}(M)$. En tidsorientering er et valg af ækvivalensklasse af timelike vektorfelter under ækvivalensrelationen at $X \sim Y$ hvis og kun hvis X og Y definerer samme tidsretning i lyskeglen i T_pM.

Definition 1.3.2. En rum-tid er en 4-dimensional, tidsorienteret og sammenhængende Lorentz mangfoldighed.

Definition 1.3.3. Einsteins gravitationstensor G er et $(2,0)$-tensorfelt på M, givet ved $G = Ric - \frac{1}{2}Sg$, hvor S er skalarkrumningen og g er metrikken.

Fysikere definerer en symmetrisk $(2,0)$-tensor kaldet stress-energy tensoren, T. Denne tensor beskriver, hvordan masse og energi er fordelt og bevæger sig i rummet. En mere detaljeret definition vil ikke blive givet her, men kan findes i Landau, Lifshitz: The Classical Theory of Fields. Et lille vigtigt faktum er, at i vacuum er $T = 0$.

Definition 1.3.4. (Einsteins feltligning) Lad g være en Lorentz metrik på M, og T en stress-energy-tensor. Lad G være Einsteins gravitationstensor. Da siges g at opfylde Einsteins feltligning, såfremt $G = 8\pi T$.

Bemærkning 1.3.5. Einsteins feltligning er et fysisk postulat ganske som Newtons love og kvantemekanikken og kan derfor ikke vises.

Der har også været en del diskussion om, hvorvidt feltligningen rent faktisk ser ud som ovenfor; Einstein lagde den såkaldte kosmologiske konstant Λ til, så ligningen bliver

$$Ric - \frac{1}{2}Sg + \Lambda g = 8\pi T.$$

Sætning 1.3.6. *En rum-tid er løsning til feltligningen i vacuum, hvis og kun hvis den er Ricci-flad, dvs.* $Ric \equiv 0$

Bevis. Vi bruger $g_\downarrow$ til at omdanne g til en (1,1) tensor, $\tilde{g}$. Opskrevet i lokale koordinater er $g = \sum g_{ij} dx^i \otimes dx^j$. Anvender vi $g_\downarrow$ fås ifølge bemærkning 1.1.4, at $dx^j = \sum g^{jk}\partial_k$. Da g^{jk} er invers til g_{ij} har vi at $\tilde{g} = \sum dx^i \otimes \partial_k = \mathrm{id}$. Opskrives feltligningen i vacuum med (1,1)-tensorer fås, idet $T = 0$ i vacuum, at

$$\widetilde{Ric} - \frac{1}{2}S\tilde{g} = 0 \iff \widetilde{Ric} = \frac{1}{2}S\tilde{g}.$$

Anvender vi (1,1) kontraktion på begge sider fås at $S = 2S$, da $C(\mathrm{id}) = 4$. Dette medfører at $S = 0$. Indsættes dette i den oprindelige ligning, ses det, at ligningen er opfyldt hvis og kun hvis $Ric \equiv 0$. $\square$

Kapitel 2

Warped products

Formålet med dette kapitel er at finde nødvendige og tilstrækkelige betingelser for, at produktet $I \times S^1 \times S^2$ udstyret med metrikken $g = dr \otimes dr + \varphi^2(r)g_{S^1} + \psi^2(r)g_{S^2}$ er en model for en Ricciflad rumtid.

Vi starter med at se på krumning af delmangfoldigheder, der er givet som $f^{-1}(r)$, hvor f er en såkaldt afstandsfunktion. Denne teori leder os til de berømte Gauss- og Codazzi-Mainardi-ligninger for delmangfoldigheder.

I andet afsnit vil først definere, hvad vi mener med et warped product. Dernæst vil vi beregne krumning af et sådant.

Tilsidst benyttes det, at $I \times S^1 \times S^2$ med metrikken givet ovenfor har struktur som et dobbelt warped product. Teorien fra de to første afsnit giver forholdsvis let Riccikrumningerne af $I \times S^1 \times S^2$. Når vi har Riccikrumningerne, er det let at opstille de nødvendige og tilstrækkelige betingelser for, at produktet er Riccifladt.

Grunden til, at dette produkt er specielt interessant, er, at det modellerer statiske symmetriske løsninger til feltligningen, fx. stjerner og sorte huller.

2.1 Krumning af delmangfoldigheder

I dette afsnit vil vi vise nogle generelle formler vedrørende krumning af indlejrede mangfoldigheder. Vi begynder med nogle vigtige definitioner.

Definition 2.1.1. Lad (M, g) være pseudoriemannsk mangfoldighed og lad $f \in C^\infty(M)$. Da er *gradienten*, $\nabla f \in TM$ den metrisk ækvivalente tangentvektor til $df \in \Omega^1(M)$.

Definition 2.1.2. $f \in C^\infty(M)$ en afstandsfunktion hvis og kun hvis $|\nabla f| = 1$.

Bemærkning 2.1.3. Da $|\nabla f| = \sqrt{g(\nabla f, \nabla f)} = 1$ er ∇f en spacelike vektor i T_pM.

Definition 2.1.4. $f\colon M \twoheadrightarrow N$ er en pseudoriemannsk submersion, hvis følgende to ting er opfyldt.

1. f er en submersion.

2. Hvis $v, w \in Ker(df)^{\perp}$ er $\langle v, w\rangle = \langle df(v), df(w)\rangle$.

Lemma 2.1.5. *Lad $f \in C^{\infty}(M)$. Antag, at f er en afstandsfunktion, da er f en pseudoriemannsk submersion.*

Bevis. Se [Pet97, Lemma 3.4]. Beviset i det pseudoriemannske tilfælde er tilsvarende. □

Vi har følgende vigtige sætning, der gør, at vi kan definere delmangfoldigheder i M ved at benytte afstandsfunktioner.

Sætning 2.1.6. *Lad $f\colon M^n \twoheadrightarrow N^m$ være en glat afbildning mellem glatte mangfoldigheder. Lad $q \in N$ og antag, at f er submersiv for alle $p \in f^{-1}(q)$. Så er $f^{-1}(q)$ en glat delmangfoldighed af dimension $n - m \geq 0$.*

Bevis. Sætningen følger af [War83, Theorem 1.38], idet df er surjektiv for alle $p \in f^{-1}(q)$, da f er submersiv. □

Bemærkning 2.1.7. Eksistensen af afstandsfunktioner er per definition ækvivalent med at den partielle differentialligning $|\nabla f| = 1$ har en løsning. I afsnit 2.1 og afsnit 2.2 vil vi uden yderligere bemærkninger antage, at en afstandsfunktion findes. I de konkrete beregninger i afsnit 2.3 vil vi eksplicit skrive en afstandsfunktion op.

Det fremgår af sætning 2.1.6 at, hvis f er en afstandsfunktion, er $f^{-1}(r)$ er en glat delmangfoldighed for alle $r \in \mathbb{R}$. Vi sætter $f^{-1}(r) = U_r$, hvor $U_r \subseteq U$ og $\dim(U_r) = n - 1$. $\nabla f = N$ er et glat normalfelt til U_r. $g_r = g_{|U_r}$ er den inducerede metriktensor på U_r.

Definition 2.1.8. Lad $v \in T_pM$. Vi dekomponerer v efter T_pU_r og N. $\tan v$ betegner tangentialkomponenten af v. $\operatorname{nor} v$ betegner normalkomponenten af v.

Lemma 2.1.9. *Lad ∇ være en konnektionen på M, og lad U_r være som ovenfor. Da er der givet en induceret konnektion ∇^r på U_r ved*

$$\nabla^r_X Y = \tan(\nabla_X Y) = \nabla_X Y - g(\nabla_X Y, N)N \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Hvis ∇ er Levi-Civita konnektionen på M, er ∇^r Levi-Civita konnektionen på U_r.

Bevis. Vi skal vise punkt 1-4 i definition 1.1.9. De første tre punkter er oplagte og overspringes derfor. Leibnizreglen kræver en lille udregning.

$$\begin{aligned}\tan(\nabla_X(fY)) &= \nabla_X(fY) - g(\nabla_X(fY), N)N \\ &= f\,\nabla_X Y + Y(f)X - g(f\,\nabla_X Y + Y(f)X, N)N \\ &= \tan(f\,\nabla_X Y + Y(f)X) = \tan(f\,\nabla_X Y) + \tan(Y(f)X)),\end{aligned}$$

hvor der undervejs er benyttet linearitet af g og Leibnizreglen for ∇.

For at vise, at ∇^r er Levi-Civita konnektionen på U_r, mangler vi at se, at ∇^r er torsionsfri og kompatibel med g_r. At ∇^r er torsionsfri følger af denne udregning.

$$\begin{aligned}\tan([X,Y]) &= [X,Y] - g([X,Y],N)N \\ &= \nabla_X Y - \nabla_Y X - g(\nabla_X Y - \nabla_Y X, N)N \\ &= \nabla_X Y - g(\nabla_X Y, N)N - (\nabla_Y X - g(\nabla_Y X, N)N) \\ &= \nabla^r_X Y - \nabla^r_Y X\end{aligned}$$

At ∇^r er kompatibel med g_r er klart, da ∇ er kompatibel med g.

På grund af entydigheden af Levi-Civita konnektionen, [Dup93, Theorem 2.16], er ∇^r Levi-Civita konnektionen på U_r. □

Definition 2.1.10. Lad U_r være som ovenfor, og lad ∇^r være Levi-Civita konnektionen på U_r. Vi definerer den inducerede krumningstensor ved

$$R^r(X,Y)Z = \nabla^r_X \nabla^r_Y Z - \nabla^r_Y \nabla^r_X Z - \nabla^r_{[X,Y]} Z, \quad X,Y,Z \in \mathfrak{X}(U_r)$$

Definition 2.1.11. Hessianten S af en funktion f er defineret ved $S(X) = \nabla_X \nabla f$, for $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Lemma 2.1.12. *Lad $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ og lad S være som overfor. $S(-)$ er et $(1,1)$-tensorfelt på M. $S(-,-) = g(S(-),-)$ er et symmetrisk $(2,0)$-tensorfelt på M.*

Bevis. Se [ONe83, Lemma 48]. Det bemærkes, at lemmaet kun vises i tilfældet $(2,0)$, men det andet tilfælde følger ved at bruge isomorfien $g_\downarrow$ fra bemærkning 1.1.4. □

Bemærkning 2.1.13. Det er tradition at sætte $S(X,Y) = II(X,Y)$, hvor II kaldes 2. fundamentalform.

Kovariant differentiation af tensorer vil ikke blive behandlet her. Uden bevis anføres det, at $S \in T^1_1(M)$ opfylder følgende Leibnizregel

$$(\nabla_Y S)(X) = \nabla_Y(S(X)) - S(\nabla_Y X) \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

Nu er vi klar til at formulere og bevise tre klassiske resultater vedrørende krumning af delmangfoldigheder.

I det efterfølgende er $U \subseteq M$ åben og $f \in C^\infty(U)$ en afstandfunktion. $N = \nabla f$ er et normalfelt til $f^{-1}(r) = U_r$ og S er Hessianten af f. ∇^r er Levi-Civita konnektionen på U_r og R^r er den inducerede krumningstensor på U_r.

Sætning 2.1.14. *Lad S og N som være som ovenfor. Da gælder der*

$$(\nabla_N S)(X) + S(S(X)) = -R(X,N)N, \quad X \in \mathfrak{X}(U)$$

Bevis. Ifølge bemærkning 2.1.13 er $(\nabla_N S)(X) = \nabla_N(S(X)) - S(\nabla_N X)$ som per definition af Hessianten er $\nabla_N \nabla_X N - \nabla_{\nabla_N X} N$. Fra samme definition får vi, at $S(S(X)) = \nabla_{\nabla_X N} N$. De to sider i ligningen er nu

$$\begin{array}{ll} \text{venstresiden:} & \nabla_N \nabla_X N - \nabla_{\nabla_N X} N + \nabla_{\nabla_X N} N \\ \text{højresiden:} & -\nabla_X \nabla_N N + \nabla_N \nabla_X N + \nabla_{[X,N]} N. \end{array}$$

Per definition af Lieparentesen, linearitet af konnektionen og det faktum, at $[Z,W] = -[W,Z]$, har vi, at $-\nabla_{\nabla_N X} N + \nabla_{\nabla_X N} N = \nabla_{[X,N]} N$.

Vi mangler nu blot, at $-\nabla_X \nabla_N N = 0$. Da $\nabla_X 0 = 0$, er det nok at vise, at $\nabla_N N = 0$. Da g ikke er degenereret, er det nok at vise: $\forall Y \neq 0 \in \mathfrak{X}(M)$ er $g(\nabla_N N, Y) = 0$. Idet S jævnfør Lemma 2.1.12 er symmetrisk, har vi

$$g(\nabla_N N, Y) = g(S(N), Y) = g(S(Y), N) = g(\nabla_Y N, N)$$

Ifølge [Dup93, Proposition 2.13] er $g(\nabla_Y N, N) = \frac{1}{2} Y(g(N,N)) = Y(1) = 0$, og sætningen er vist. □

Følgende sætning er et klassisk resultat i teorien for krumning af delmangfoldigheder. Hvis U_r er en regulær flade i $\mathbb{R}^3$ fås de klassiske ligninger, der kan ses i do Carmos bog "Differential Geometry of Curves and Surfaces".

Sætning 2.1.15. *(Gauss, Codazzi-Mainardi) Lad $X, Y \in \mathfrak{X}(U_r)$ og lad S, N, ∇^r og R^r være som ovenfor. Da gælder*

1. $\tan R(X,Y)Z = R^r(X,Y)Z - II(Y,Z)S(X) + II(X,Z)S(Y)$, $Z \in \mathfrak{X}(U)$,
2. $\operatorname{nor} R(X,Y)Z = g(-(\nabla_X S)(Y) + (\nabla_Y S)(X), Z)N$, $Z \in \mathfrak{X}(U_r)$.

Bevis. Strategien er at udtrykke R ved R^r og så til sidst sammenligne tangential- og normalkomponenter. Per definition af ∇^r har vi

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \\ &= \nabla_X(\nabla^r_Y Z + g(\nabla_Y Z, N)N) - \nabla_Y(\nabla^r_X Z + g(\nabla_X Z, N)N) \\ &\quad - \nabla^r_{[X,Y]} Z - g(\nabla_{[X,Y]} Z, N)N \end{aligned}$$

Vi har også, at $g(Y,N)=0$, idet $Y \in \mathfrak{X}(U_r)$. Dette giver $Z(g(Y,N)) = 0 = g(\nabla_Z Y, N) + g(Y, \nabla_Z N)$, ifølge [Dup93, Proposition 2.13]. Dette giver nu per definition af Hessianten, at $g(\nabla_Z Y, N) = -g(Y, S(Z)) = -g(S(Y), Z)$, da S er symmetrisk. Vi har så, at

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z = {} & \nabla_X(\nabla^r_Y Z - g(S(Y),Z)N) - \nabla_Y(\nabla^r_X Z - g(S(X),Z)N) \\ & - \nabla^r_{[X,Y]} Z + g(S([X,Y],Z)N. \end{aligned}$$

Per linearitet af konnektionen har vi

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z = {} & \nabla_X \nabla^r_Y Z - \nabla_Y \nabla^r_X Z - \nabla^r_{[X,Y]} Z \\ & - \nabla_X(g(S(Y),Z)N) + \nabla_Y(g(S(X),Z)N) \\ & + g(S([X,Y]),Z)N. \end{aligned}$$

Ved samme argument som ovenfor fås, at

$$\nabla_X \nabla^r_Y Z = \nabla^r_X \nabla^r_Y Z - g(S(X), \nabla^r_Y Z)N.$$

Dette giver

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z = {} & \nabla^r_X \nabla^r_Y Z - \nabla^r_Y \nabla^r_X Z - \nabla^r_{[X,Y]} Z \\ & + g(S(Y), \nabla^r_X Z)N - g(S(X), \nabla^r_Y Z)N \\ & - g(\nabla_X S(Y), Z)N - g(S(Y), \nabla_X Z) - g(S(Y),Z)\nabla_X N \\ & + g(\nabla_Y S(X), Z)N + g(S(X), \nabla_Y Z) + g(S(X),Z)\nabla_Y N \\ & + g(S([X,Y]),Z)N. \end{aligned}$$

Per definition af R^r og S har vi

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z = {} & R^r(X,Y)Z \\ & - g(S(X), \nabla^r_Y Z)N + g(S(Y), \nabla^r_X Z)N \\ & - g(\nabla_X S(Y), Z)N - g(S(Y), \nabla_X Z) - g(S(Y),Z)S(X) \\ & + g(\nabla_Y S(X), Z)N + g(S(X), \nabla_Y Z) + g(S(X),Z)S(Y) \\ & + g(S([X,Y]),Z)N. \end{aligned}$$

Vi har fra beviset for 2.1.14, at $S(N) = 0 \Rightarrow S(X) \in TU_r$ for $X \in \mathfrak{X}(U_r)$, så vi har, at $g(S(X), \nabla^r_Y Z) = g(S(X), \nabla_Y Z)$. Idet vi husker, at både S og g er tensorer, har vi

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z = {} & R^r(X,Y)Z \\ & - g(\nabla_X S(Y), Z)N - g(S(Y),Z)S(X) \\ & + g(\nabla_Y S(X), Z)N + g(S(X),Z)S(Y) \\ & + g(S(\nabla_X Y),Z)N - g(S(\nabla_Y X),Z)N. \end{aligned}$$

Ved at benytte Leibnizreglen for S fås

$$\begin{aligned}
R(X,Y)Z = & R^r(X,Y)Z \\
& + g(S(X),Z)S(Y) - g(S(Y),Z)S(X) \\
& + g(-\nabla_X S(Y) + \nabla_Y S(X) + S(\nabla_X Y) - S(\nabla_Y X), Z)N \\
= & R^r(X,Y)Z + g(S(X),Z)S(Y) - g(S(Y),Z)S(X) \\
& + g(-(\nabla_X S)(Y) + (\nabla_Y S)(X))N.
\end{aligned}$$

Det ønskede følger nu ved sammeligning af tangential- of normalkomponenter samt af definitionen af II. □

Vi har også en koordinatfri beskrivelse. Det formuleres i følgende sætning.

Sætning 2.1.16. *Lad f, N og S være som ovenfor. Lad $\partial_r = \nabla f$ og $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$. Da gælder der*

1. $(\nabla_{\partial_r} S)(X) + S(S(X)) = -R(X, \partial_r)\partial_r$,
2. $L_{\partial_r} g(X,Y) = 2g(S(X),Y)$,
3. $(\nabla_{\partial_r} S)(X) = L_{\partial_r} S(X)$.

Bevis. Første udsagn er blot en reformuleringen af sætning 2.1.14. Andet udsagn er en udregning og overspringes. Udregningen kan ses i [Pet97, Proposition 4.1]. Sidste udsagn følger af følgende udregning. Per definition af den Lie-afledte, L, og Leibnizreglen for S har vi

$$\begin{aligned}
(L_{\partial_r} S)(X) &= [\partial_r, S(X)] - S([\partial_r, X]) \\
&= \nabla_{\partial_r} S(X) - \nabla_{S(X)} \partial_r - S(\nabla_{\partial_r} X) - \nabla_X \partial_r).
\end{aligned}$$

Per linearitet af Hessianten har vi

$$\begin{aligned}
(L_{\partial_r} S)(X) &= \nabla_{\partial_r}(S(X)) - \nabla_{S(X)} \partial_r - S(\nabla_{\partial_r} X) - S(\nabla_X \partial_r) \\
&= (\nabla_{\partial_r} S)(X) - \nabla_{\nabla_X \partial_r} \partial_r + \nabla_{\nabla_X \partial_r} \partial_r \\
&= (\nabla_{\partial_r} S)(X),
\end{aligned}$$

hvor vi i det næstsidste lighedstegn har brugt Leibnizreglen for S. □

2.2 Krumning af warped products

I dette afsnit vil vi benytte de generelle formler i afsnit 2.1 til at beregne $\mathfrak{R}$ og Ric på mangfoldigheder med specielle restriktioner på formen af metrikken.

Definition 2.2.1. Lad M, M_1, M_2 være glatte mangfoldigheder. Lad $I \subseteq \mathbb{R}^+$ være et åbent interval. Lad $r = \mathrm{proj}_I$, og lad $\psi, \varphi \in C^\infty(I)$ og $\psi, \varphi > 0$.

1. En metrik på formen $dr \otimes dr + \varphi^2(r)g_M$ på $I \times M$ kaldes et *warped product*.
2. En metrik på formen $dr \otimes dr + \varphi(r)^2 g_{M_1} + \psi(r)^2 g_{M_2}$ på $I \times M_1 \times M_2$ kaldes et *dobbelt warped product*.
3. En metrik på formen $dr \otimes dr + \varphi^2(r)g_{S^{n-1}}$ på $I \times S^{n-1}$ kaldes *rotationssymmetrisk*.

Bemærkning 2.2.2. For det første er det velkendt, at hvis M_1 og M_2 er glatte mangfoldigheder, da er deres cartesiske produkt $M_1 \times M_2$ også en glat mangfoldighed.

Det er et krav til en metrik, at den er glat og ikke degenereret. At produktmetrikkerne er glatte følger af, at g_M, g_{M_1}, g_{M_2} og $g_{S^{n-1}}$ er glatte metrikker og $\psi, \varphi \in C^\infty(I)$. At produktmetrikkerne ikke er degenererede følger af [ONe83, Lemma 3.5], da $\psi, \varphi > 0$.

Hvis man ønsker pseudoriemannske produkter skal der ændres fortegn på $dr \otimes dr$ eller, man skal sørge for, at enten g_M, g_{M_1}, g_{M_2} eller $g_{S^{n-1}}$ er en pseudoriemannsk metrik.

Bemærkning 2.2.3. I resten af dette afsnit arbejder vi under følgende antagelser. (M, g) er en pseudoriemannsk mangfoldighed og $U \subseteq M$ en åben mængde. $f \in C^\infty(U)$ er en afstandsfunktion og $U_r = f^{-1}(r)$. $\nabla f = N$ er normalvektor til U_r.

Vi vil betragte tilfældet, hvor metrikken g opfylder følgende kriterium: For et fast r_0 har vi identifikationen $U \overset{diffeo}{=} I \times U_{r_0}$, under hvilken g opfylder at, hvis $\{E_1, \ldots, E_{n-1}\}$ er en ortonormal flytteramme på U_{r_0} med hensyn til $g_{|U_{r_0}}$, er

$$\{F_1, \ldots, F_n\} = \{\varphi_1(r)^{-1}E_1, \ldots, \varphi_{n-1}(r)^{-1}E_{n-1}, N\},$$

en ortonormal flytteramme på U med hensyn til g, hvor $\varphi_i \in C^\infty(I)$ og $\varphi_i > 0$. Desuden skal vi have, at $\varphi_i(r_0) = 1$. Hvis $\{E_1, \ldots, E_{n-1}, N\}$ er en basis for T_pU, er

$$\underline{g} = \operatorname{diag}(\varphi_1^2(r), \ldots, \varphi_{n-1}^2(r), 1).$$

I denne situation er $E_i \in \mathfrak{X}(U_r)$ vektorfelter, der ikke afhænger af r. Det er også klart, at g_r kun afhænger af r.

Bemærkning 2.2.4. Et specialtilfælde af situationen i bemærkning 2.2.3 ovenfor er et warped product. Betragt $(M, \tilde{g}) = (I \times M_1, dr \otimes dr + g_{M_1}$. Vi har ved projektionen $f \colon I \times M_1 \to I$ givet en afstandsfunktion, idet $|\nabla f| = 1$. Vi har at $U_r = M_1 \times \{r\}$ og $M = I \times U_r = I \times M_1$, med metrik $dr \otimes dr + g_{M_1}$. Da er (M, g) givet ved $(M, dr \otimes dr + \varphi^2(r)g_{M_1})$, der jo præcis er et warped product.

Vælg en ortonormal flytteramme $\{E_1, \dots E_{n-1}, N\}$ på $I \times M_1$ med hensyn til $dr \otimes dr + g_{M_1}$. Da får man en ortonormal flytteramme $\{F_1, \dots F_n\}$, $F_n = N$ på (M, g), hvor

$$\{F_1, \dots F_n\} = \{\varphi^{-1}(r)E_1, \dots \varphi^{-1}(r)E_{n-1}, N\}.$$

Med hensyn til basen $\{E_1, \dots E_{n-1}, N\}$ er $\underline{g} = \operatorname{diag}(\varphi^2(r), \dots, \varphi^2(r), 1)$.

Først ønsker vi at vise, at Hessianten har en særlig simpel form i det setup, der er beskrevet i bemærkning 2.2.3.

Proposition 2.2.5. *Med antagelser som i bemærkning 2.2.3 er matrixrepræsentationen med hensyn til* $\{F_1, \dots, F_n\}$ *for* S $\operatorname{diag}\left(\frac{\dot\varphi_1}{\varphi_1}, \dots, \frac{\dot\varphi_{n-1}}{\varphi_{n-1}}, 0\right)$.

Bevis. Vi benytter udsagn (2) i sætning 2.1.16 til beregning af S. Hvis $i = n$ eller $j = n$ er $g(S(F_j), F_i) = g(S(F_i), F_j)$ per symmetri af Hessianten. Fra beviset for sætning 2.1.14 er $S(F_n) = 0$. Hvis $i, j \neq n$ har vi

$$L_N g(F_i, F_j) = L_N(g(F_i, F_j)) - g([N, F_i], F_j) - g(F_i, [N, F_j]).$$

Da $\{F_i\}$ er en ortonormalbasis er $g(F_i, F_j) = 1$ så $L_N(g(F_i, F_j)) = 0$. Ifølge vores antagelse om $F_i = \varphi_i(r)^{-1}E_i$ har vi

$$L_N g(F_i, F_j) = -g([N, \varphi_i(r)^{-1}E_i], F_j) - g(F_i, [N, \varphi_j(r)^{-1}E_j])$$

N er normalvektor til U_r og dermed i r-retningen på U. Da E_i ikke afhænger af r fås

$$[N, \varphi_i(r)^{-1}E_i] = N(\varphi_i^{-1}(r))E_i = \frac{d}{dr}(\varphi_i^{-1}(r))E_i = -\frac{\dot\varphi_i(r)}{\varphi_i^2(r)}E_i = -\frac{\dot\varphi_i(r)}{\varphi_i(r)}F_i.$$

Det vil sige, at vi har

$$\begin{aligned}
L_N g(F_i, F_j) &= -g\left(-\frac{\dot\varphi_i(r)}{\varphi_i(r)}F_i, F_j\right) - g\left(-\frac{\dot\varphi_j(r)}{\varphi_j(r)}F_j, F_i\right) \\
&= \left(\frac{\dot\varphi_i(r)}{\varphi_i(r)} + \frac{\dot\varphi_j(r)}{\varphi_j(r)}\right) g(F_i, F_j) \\
&= \left(\frac{\dot\varphi_i(r)}{\varphi_i(r)} + \frac{\dot\varphi_j(r)}{\varphi_j(r)}\right) \delta_j^i.
\end{aligned}$$

Det ønskede følger nu, idet $L_N g(F_i, F_j) = 2g(S(F_i), F_j)$. Vi har en tilsvarende sammenhæng for $\{E_i\}$, da begge både g og S er tensorer. □

Proposition 2.2.6. *Lad situationen være som i bemærkning 2.2.3. Da er* $R(E_i, N)N = -\frac{\ddot\varphi_i}{\varphi_i}E_i$.

Bevis. Vi bruger formlen fra sætning 2.1.14

$$\begin{aligned} R(E_i,N)N &= -\nabla_N S(E_i) - S(S(E_i)) \\ &= -\nabla_N(S(E_i)) + S(\nabla_N E_i) - S(\nabla_{E_i} N). \end{aligned}$$

Da konnektionen er torsionsfri og E_i ikke afhænger af r, er $[N,E_i] = \frac{d}{dr}(E_i) = 0$ så $\nabla_N E_i = \nabla_{E_i} N$. Linearitet af Hessianten giver $\nabla_{E_i} N = \varphi_i S(F_i) = \varphi_i \frac{\dot\varphi_i}{\varphi_i} F_i = \dot\varphi F_i = \frac{\dot\varphi_i}{\varphi_i} E_i$. Vi får så

$$\begin{aligned} R(E_i,N)N &= -\nabla_N(S(E_i)) = -\nabla_N\left(\frac{\dot\varphi_i}{\varphi_i}E_i\right) \\ &= -\frac{d}{dr}\left(\frac{\dot\varphi_i}{\varphi_i}E_i\right) - \frac{\dot\varphi_i}{\varphi_i}\nabla_N E_i \end{aligned}$$

ifølge Leibnizreglen for konnektionen. Ved differentiation fås

$$\begin{aligned} R(E_i,N)N &= -\frac{\ddot\varphi_i\varphi - \dot\varphi_i^2}{\varphi_i^2}E_i - \frac{\dot\varphi_i}{\varphi_i}\nabla_{E_i} N = -\frac{\ddot\varphi_i\varphi_i - \dot\varphi_i^2}{\varphi_i^2}E_i - \frac{\dot\varphi_i}{\varphi_i}\frac{\dot\varphi_i}{\varphi_i}E_i \\ &= -\frac{\ddot\varphi_i\varphi_i - \dot\varphi_i^2}{\varphi_i^2}E_i - \frac{\dot\varphi_i^2}{\varphi_i^2}E_i = -\frac{\ddot\varphi_i}{\varphi_i}E_i, \end{aligned}$$

hvor vi har benyttet beregningen af $S(E_i)$ ovenfor. □

Bemærkning 2.2.7. Med antagelser som i bemærkning 2.2.3 kan man på tilsvarende vis benytte sætning 2.1.15 punkt 1 til at beregne $g(R(F_i,F_j)F_k,F_l)$, $i,j,k,l<n$. Ved beregninger som ovenfor fås

$$g(R(F_i,F_j)F_k,F_l) = g_r(R^r(F_i,F_j)F_k,F_l) - \frac{\dot\varphi_i\dot\varphi_j}{\varphi_i\varphi_j}(\delta_{ik}\delta_{jl}\delta_{jk}\delta_{il}), \quad i,j,k,l<n$$

På grund af symmetrirelationerne for $\mathfrak{R}$ leder vi kun efter led med $i<j$ og $l<k$. Hvis vi yderligere er i en situation, hvor $R^r(F_i,F_j)F_k = 0$ for i,j,k forskellige simplificerer udtrykket en del; så er der kun et led, der ikke går ud, nemlig

$$g(R(F_i,F_j)F_j,F_i) = g_r(R^r(F_i,F_j)F_j,F_i) - \frac{\dot\varphi_i\dot\varphi_j}{\varphi_i\varphi_j}.$$

Beviserne for disse påstande kan ses i [Pet97, pp 67].

Hvis man benytter punkt (2) i sætning 2.1.15 får man også en nyttig formel. Det formuleres i næste proposition.

Proposition 2.2.8. *Lad situationen være som i bemærkning 2.2.3, og lad* $\frac{\dot\varphi_i}{\varphi_i} = \lambda_i$. *Da er*

$$g(R(E_i,E_j)E_k,N) = (\lambda_k - \lambda_j)g_r(\nabla^r_{E_i} E_j, E_k) + (\lambda_i - \lambda_k)g_r(\nabla^r_{E_j} E_i, E_k)$$

for $i,j,k<n$.

Bevis. Vi regner på punkt (2) i sætning 2.1.15. Vi har at $g(N,N) = 1$ og, idet vi benytter Leibnizreglen for S, får vi

$$\begin{aligned}
g(R(E_i,E_j)E_k,N) &= -g((\nabla_{E_i} S)(E_j),E_k) + g((\nabla_{E_j})S(E_i),E_k) \\
&= -g(S(\nabla_{E_i} E_j) + \nabla_{E_i} S(E_j),E_k) \\
&\quad + g(S(\nabla_{E_j} E_i) + \nabla_{E_j} S(E_i),E_k)
\end{aligned}$$

Fra beviset for proposition 2.2.6 har vi at $S(E_i) = \lambda_i E_i$. Ved linearitet af konnektionen fås

$$\begin{aligned}
g(R(E_i,E_j)E_k,N) &= -g(S(\nabla_{E_i} E_j) + \lambda_j \nabla_{E_i} E_j, E_K) \\
&\quad + g(S(\nabla_{E_j} E_i) + \lambda_i \nabla_{E_j} E_i, E_K) \\
&= g(S([E_j,E_i]),E_k) - g_r(\lambda_j \nabla_{E_i} E_j, E_k) \\
&\quad + g_r(\lambda_i \nabla_{E_i} E_j, E_k),
\end{aligned}$$

hvor vi i det sidste lighedstegn har brugt linearitet af Hessianten, linearitet af g samt definitionen af Lie-parentesen. S er symmetrisk, så vi får

$$\begin{aligned}
g(R(E_i,E_j)E_k,N) &= g([E_j,E_i],S(E_k)) - g_r(\lambda_j \nabla_{E_i} E_j, E_k) \\
&\quad + g_r(\lambda_i \nabla_{E_i} E_j, E_k) \\
&= g(\nabla_{E_j} E_i - \nabla_{E_i} E_j, \lambda_k E_k) - g_r(\lambda_j \nabla_{E_i} E_j, E_k) \\
&\quad + g_r(\lambda_i \nabla_{E_i} E_j, E_k) \\
&= \lambda_k g_r(\nabla_{E_j} E_i, E_k) - \lambda_k g_r(\nabla_{E_i} E_j, E_k) \\
&\quad - \lambda_j g_r(\nabla_{E_i} E_j, E_k) + \lambda_i g_r(\nabla_{E_i} E_j, E_k) \\
&= (\lambda_k - \lambda_j) g_r(\nabla^r_{E_j} E_i, E_k) + (\lambda_i - \lambda_k) g_r(\nabla^r_{E_i} E_j, E_k),
\end{aligned}$$

Normalkomponenterne af leddene $\nabla_{E_\mu} E_\nu$ forsvinder, da $E_\mu = \varphi_\mu(r)^{-1} F_\mu$ og $F_\mu \perp N, \mu < n$, og dermed kan ∇ erstattes med ∇^r. Et tilsvarende argument gør, at det er korrekt at erstatte g med g_r. Vi får en tilsvarende ligning for F_i per tensorialitet af venstre og højre side. □

Krumningsoperatoren simplificerer også en del, idet vi har følgende proposition.

Proposition 2.2.9. *Antag, at vi er i situationen beskrevet i bemærkning 2.2.3. Antag yderligere, at $R^r(F_i,F_j)F_k = 0$, hvis de tre indices er indbyrdes forskellige. Lad $\lambda_i = \frac{\dot\varphi_i}{\varphi_i}$. For $i < n$ gælder der*

$$\begin{aligned}
\mathfrak{R}(F_i \wedge F_n) &= -\frac{\ddot\varphi_i}{\varphi_i} F_i \wedge F_n \\
&\quad + \sum_{l<k<n} (\lambda_i - \lambda_l) g_r(\nabla^r_{F_k} F_l, F_i) F_l \wedge F_k \\
&\quad + \sum_{l<k<n} (\lambda_k - \lambda_i) g_r(\nabla^r_{F_l} F_k, F_i) F_l \wedge F_k.
\end{aligned}$$

For $i, j < n$ har vi

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}(F_i \wedge F_j) &= (g_r(R^r(F_i, F_j)F_j, F_i) - \lambda_i \lambda_j)\, F_i \wedge F_j \\ &\quad - \sum_{l<n} (\lambda_l - \lambda_j) g_r(\nabla^r_{F_i} F_j, F_l) F_l \wedge F_n \\ &\quad - \sum_{l<n} (\lambda_i - \lambda_l) g_r(\nabla^r_{F_j} F_i, F_l) F_l \wedge F_n.\end{aligned}$$

Bevis. Bevis for første påstand. Da $F_l \wedge F_k$, $l < k$ er en ortonormalbasis for Λ^2, er værdierne for $\mathfrak{R}$ ifølge bemærkning 1.2.2 givet ved

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}(F_i \wedge F_n) &= \sum_{l<k} g(R(F_i, F_n)F_k, F_l) F_l \wedge F_k \\ &= \sum_{l<k<n} g(R(F_i, F_n)F_k, F_l) F_l \wedge F_k \\ &\quad + \sum_{l<n} g(R(F_i, F_n)F_n, F_l) F_l \wedge F_n\end{aligned}$$

Ifølge sætning 2.2.6 er $R(F_i, N)N = \frac{-\ddot{\varphi}_i}{\varphi_i} F_i$, da R er en tensor. Der er derfor kun et led i den sidste sum, der ikke går ud. Ved hjælp af symmetrirelationerne for R fås

$$\mathfrak{R}(F_i \wedge F_n) = \sum_{l<k<n} g(R(F_k, F_l)F_i, F_n) F_l \wedge F_k - \frac{\ddot{\varphi}_i}{\varphi_i} F_i \wedge F_n$$

Ved at benytte resultatet fra proposition 2.2.8 fås

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}(F_i \wedge F_n) &= \sum_{l<k<n} (\lambda_i - \lambda_l) g_r(\nabla^r_{F_k} F_l, F_i) F_k \wedge F_l \\ &\quad + \sum_{l<k<n} (\lambda_k - \lambda_i) g_r(\nabla^r_{F_l} F_k, F_i) F_k \wedge F_l \\ &\quad - \frac{\ddot{\varphi}_i}{\varphi_i} F_i \wedge F_n.\end{aligned}$$

Beviset for anden påstand er tilsvarende og udelades. Udregningen kan ses i [Pet97, Proposition 1.4] □

Bemærkning 2.2.10. Der er flere steder henvist til [Pet97]. I [Pet97] behandles kun det riemannske tilfælde. Der er ingen af beviserne, hverken i henvisningerne til [Pet97] eller i afsnittene 2.1 og 2.2, der afhænger af, hvorvidt metriktensoren er positiv definit. Da afsnit 2.3 er et specialtilfælde af 2.1 og 2.2 virker det også, selv om metrikkerne gøres indefinitte.

2.3 Beregning af krumning på $I \times S^p \times S^q$

Vi vil i dette afsnit beregne krumningsoperatoren og Riccikrumningen på $I \times S^p \times S^q$ udstyret med metrikken $dr \otimes dr + \varphi^2(r)g_{S^p} + \psi^2(r)g_{S^q}$.

Dette vil blive gjort i fire skridt startende med S^p med den inducerede metrik fra $\mathbb{R}^{p+1}$. Beregningerne af krumningerne på produktsfæren $S^p \times S^q$ refereres blot. Dernæst vil vi beregning krumning på $I \times S^p, g = dr \otimes dr + \varphi^2(r)g_{S^p}$. Dette er et specialtilfælde af bemærkning 2.2.4 og resultaterne fra afsnit 2.2 vil blive benyttet til den udregning. Tilsidst benytter vi de foregående tre tilfælde til at beregne krumningsoperatoren og Riccikrumningen på $I \times S^p \times S^q, g = dr \otimes dr + \varphi^2(r)g_{S^p} + \psi^2(r)g_{S^q}$.

Vi vil benytte notationen $S^p(r) = S^p_r = \{x \in \mathbb{R}^{p+1} \mid |x| = r\}$, $S^p(1) = S^p$ og g_{S^p} for den inducerede metrik på S^p.

Bemærkning 2.3.1. På $\mathbb{R}^{p+1}\backslash\{0\}$ har vi en afstandsfunktion givet ved $f(x) = |x|$. Vi har da, at $f^{-1}(r) = U_r = S^p_r$. En direkte udregning, som overspringes, giver, at Hessianten bliver $S(v) = \frac{1}{r}v - \frac{1}{r}g(v,N)N$. Da $R \equiv 0$ på $\mathbb{R}^n$, har vi fra sætning 2.1.15, at

$$R^r(X,Y)Z = r^{-2}\left(g_r(Y,Z)X - g_r(X,Z)Y\right)$$

for $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(S^p_r)$. Hvis $\{F_1, \dots, F_p\}$ er en ortonormal flytteramme på S^p, ses det fra ovenstående formel, at $R(F_i, F_j)F_k = 0$ for $i \neq j \neq k$.

Bemærkning 2.3.2. Beregningerne af krumning på produktsfæren ($S^p_{1/\sqrt{a}} \times S^q_{1/\sqrt{b}}$ med metrik givet ved $g = \frac{1}{a}g_{S^p} + \frac{1}{b}g_{S^q}$ overspringes. Beregningerne kan ses i [Pet97, Section 3.2.2]. For reference skal det nævnes, at $R(F_i, F_j)F_k = 0$ for $i \neq j \neq k$.

Hvis $\{F_1, \dots, F_{p+q}\}$ er en ortonormalbasis på $S^p_{1/\sqrt{a}} \times S^q_{1/\sqrt{b}}$ med metrik som ovenfor, har vi at

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{R}(F_i \wedge F_j) = 0, \quad i \le p,\ j \ge p+1,\\
&\mathfrak{R}(F_i \wedge F_j) = aF_i \wedge F_j, \quad i, j \le p,\\
&\mathfrak{R}(F_i \wedge F_j) = bF_i \wedge F_j, \quad i, j \ge p+1,\\
&Ric(F_i) = (n-1)aF_i, \quad i \le p,\\
&Ric(F_j) = (m-1)bF_j, \quad i \ge p+1.
\end{aligned}$$

I de næste to tilfælde er vi i en situation analog til den beskrevet for et generelt warped product i bemærkning 2.2.4. Vi vil nu benytte de generelle formler i afsnit 2.2 til at beregne krumning på $I \times S^p$ med metriktensor givet ved $g = dr \otimes dr + \varphi^2(r)g_{S^p}$, hvor $\varphi \in C^\infty(I)$ og $\varphi > 0$.

Bemærkning 2.3.3. Vi har ved projektionen, $f\colon I \times S^p \to I$ givet en afstandsfunktion, da $|\nabla f| = 1$.

Hvis $\{E_1, \ldots, E_p\}$ er en ortonormal flytteramme på S^p med hensyn til g_{S^p} er

$$\{F_1, \ldots, F_{p+1}\} = \{(\varphi(r))^{-1}E_1, \ldots, (\varphi(r))^{-1}E_p, N\}$$

en ortonormal flytteramme på $I \times S^p$ med metrik $g = dr \otimes dr + \varphi^2(r)g_{S^p}$, idet $g_{S^p_r} = r^2 g_{S^p}$.

Til beregning af krumningsoperatoren har vi følgende sætning.

Sætning 2.3.4. *Lad $I \times S^p$ være udstyret med metriktensor $g = dr \otimes dr + \varphi^2(r)g_{S^p}$, hvor $\varphi \in C^\infty(I)$. Lad $\{F_i\}$ være som ovenfor. Da er $\mathfrak{R}$ givet ved*

$$\mathfrak{R}(F_i \wedge F_{p+1}) = \frac{-\ddot{\varphi}}{\varphi} F_i \wedge F_{p+1} \quad i < p+1,$$
$$\mathfrak{R}(F_i \wedge F_j) = \frac{1 - \dot{\varphi}^2}{\varphi^2} F_i \wedge F_j \quad i, j < p+1.$$

Bevis. For at kunne benytte formlerne fra sætning 2.2.9 skal $R^r(F_i, F_j)F_k = 0$ for $i \neq j \neq k$. Det er velkendt, at $T_{(r,p)}(I \times S^p) = T_r I \oplus T_p S^p$. Det betyder at $\nabla_{F_i} F_j = 0$ hvis $F_i \in T_p I$ og $F_j \in T_p S^p$. Hvis $F_i, F_j, F_k \in T_p S^p$ er $R^r(F_i, F_j)F_k = 0$ for $i \neq j \neq k$, idet det gælder på S^p. Hvis for eksempel at $F_i, F_j \in T_p S^p$ og $F_k \in T_p I$ er $R^r(F_i, F_j)F_k = 0$ på grund af ovenstående faktum om konnektionen. Dette betyder at $R^r(F_i, F_j)F_k = 0$ for $i \neq j \neq k$.

Vi ved, at snitkrumningen på S^p udstyret med metrikken $\varphi^2 g_{S^p}$, er

$$K_p S = \frac{1}{\varphi^2} = g_r(R^r(F_i, F_j)F_j, F_i) \quad i, j < n,$$

da $Q(F_i, F_j) = 1$. Vi kan nu benytte sætning 2.2.9 til at beregne krumningsoperatoren. Ligningerne simplificerer en del, idet $\varphi_1, \ldots, \varphi_p = \varphi$, og dermed er $\lambda_i = \lambda_k = \lambda_j$. Idet resten af leddene er 0, får man det ønskede. □

Vi ønsker også at beregne Riccikrumningen, $Ric(F_i)$, $i \leq p+1$. Dette gøres i følgende sætning.

Sætning 2.3.5. *Lad $I \times S^p$ være udstyret med metriktensor $g = dr \otimes dr + \varphi^2(r)g_{S^p}$, hvor $\varphi \in C^\infty(I)$. Lad $\{F_i\}$ være som ovenfor. Da er Ric givet ved*

$$Ric(F_i) = \left((p-1)\frac{1 - \dot{\varphi}^2}{\varphi^2} - \frac{\dot{\varphi}^2}{\varphi^2} \right) F_i, \quad i < p+1$$
$$Ric(F_{p+1}) = -p\frac{\ddot{\varphi}}{\varphi} F_{p+1}$$

Bevis. Vi benytter definitionen af Riccikrumningen. Fra Definition 1.2.3 har vi, at $Ric(F_i) = \sum_{j=1}^{p+1} R(F_i, F_j)F_j$, idet $\{F_i\}$ er en ortonormal flytteramme.

Vi har at

$$
\begin{aligned}
Ric(F_i) &= \sum_{j=1}^{p+1} R(F_i, F_j)F_j \\
&= \sum_{j=1}^{p} R(F_i, F_j)F_j + R(F_i, F_{p+1})F_{p+1} \\
&= \sum_{j=1}^{p} R(F_i, F_j)F_j - \frac{\ddot{\varphi}}{\varphi}F_i,
\end{aligned}
$$

ifølge sætning 2.2.6. Vi har at $g_r(R^r(F_i, F_j)F_j, F_i) = \frac{1}{\varphi^2}$ og ved at benytte resultatet fra bemærkning 2.2.7 fås

$$
\begin{aligned}
Ric(F_i) &= \left((p-1)\left(\frac{1}{\varphi^2} - \frac{\dot{\varphi}\dot{\varphi}}{\varphi\varphi}\right) - \frac{\ddot{\varphi}}{\varphi}\right)F_i, \\
&= \left((p-1)\left(\frac{1-\dot{\varphi}^2}{\varphi^2}\right) - \frac{\ddot{\varphi}}{\varphi}\right)F_i,
\end{aligned}
$$

for $i < p+1$.

I beregningen af $Ric(F_{p+1})$ benyttes resultatet i sætning 2.2.6, hvorfra vi har $R(F_i, F_{p+1})F_{p+1} = -\frac{\ddot{\varphi}}{\varphi}F_i$, hvilket per antisymmetri af krumningstensoren giver $R(F_i, F_{p+1})F_i = \frac{\ddot{\varphi}}{\varphi}F_{p+1}$. Vi får så

$$
\begin{aligned}
Ric(F_{p+1}) &= \sum_{i=1}^{p+1} R(F_{p+1}, F_i)F_i = -\sum_{i=1}^{p+1} R(F_i, F_{p+1})F_i \\
&= -p\frac{\ddot{\varphi}}{\varphi}F_{p+1},
\end{aligned}
$$

idet $R(F_{p+1}, F_{p+1})F_{p+1} = 0$ per antisymmetri. □

Sidste trin i firetrins-raketten er at beregne krumningsoperatoren og Riccikrumning på $I \times S^p \times S^q$, med metriktensor givet ved $dr \otimes dr + \varphi^2(r)g_{S^p} + \psi^2(r)g_{S^q}$, hvor $\varphi, \psi \in C^\infty(I)$ og $\varphi, \psi > 0$

Bemærkning 2.3.6. Vi har som før ved projektionen givet en afstandsfunktion. Hvis $\{E_1, \dots, E_{p+q}\}$ er en ortonormal flytteramme på $S^p \times S^q$ med metrik $g_{S^p} + g_{S^q}$ er

$$
\begin{aligned}
&\{F_0, \dots, F_{p+q}\} \\
&= \{N, (\varphi(r))^{-1}E_1, \dots, (\varphi(r))^{-1}E_p, (\psi(r))^{-1}E_{p+1}, \dots, (\psi(r))^{-1}E_{p+q}\}
\end{aligned}
$$

en ortonormal flytteramme på $I \times S^p \times S^q$ med metrik givet ved $dr \otimes dr + \varphi^2(r)g_{S^p} + \psi^2(r)g_{S^q}$.

Vi kan nu benytte, hvad vi ved til at beregne krumningsoperatoren og Riccikrumningen på $I \times S^p \times S^q$.

Sætning 2.3.7. *Lad $I \times S^p \times S^q$ være udstyret med metrikken $dr \otimes dr + \varphi^2(r) g_{S^p} + \psi^2(r) g_{S^q}$, hvor $\varphi, \psi \in C^\infty(I)$. Lad $\{F_i\}$ være som ovenfor. Da gælder*

$$\begin{aligned}
\mathfrak{R}(F_0 \wedge F_j) &= \frac{-\ddot{\varphi}}{\varphi} F_0 \wedge F_j, \quad 0 < j \leq p, \\
\mathfrak{R}(F_0 \wedge F_j) &= \frac{-\ddot{\psi}}{\psi} F_0 \wedge F_j, \quad j > p, \\
\mathfrak{R}(F_i \wedge F_j) &= \frac{1 - \dot{\varphi}^2}{\varphi^2} F_i \wedge F_j, \quad 0 < i < j \leq p, \\
\mathfrak{R}(F_i \wedge F_j) &= \frac{1 - \dot{\psi}^2}{\psi^2} F_i \wedge F_j, \quad p < i < j, \\
\mathfrak{R}(F_i \wedge F_j) &= \frac{-\dot{\varphi}\dot{\psi}}{\varphi\psi} F_i \wedge F_j, \quad i \leq p < j.
\end{aligned}$$

Riccikrumningerne er givet ved

$$\begin{aligned}
Ric(F_0) &= \left(-p\frac{\ddot{\varphi}}{\varphi} - q\frac{\ddot{\psi}}{\psi} \right) F_0, \\
Ric(F_i) &= \left(-\frac{\ddot{\varphi}}{\varphi} + (p-1)\frac{1-\dot{\varphi}^2}{\varphi^2} - q\frac{\dot{\varphi}\dot{\psi}}{\varphi\psi} \right) F_i, \quad 0 < i \leq p, \\
Ric(F_j) &= \left(-\frac{\ddot{\psi}}{\varphi} + (q-1)\frac{1-\dot{\psi}^2}{\psi^2} - p\frac{\dot{\varphi}\dot{\psi}}{\varphi\psi} \right) F_j, \quad j \geq p.
\end{aligned}$$

Bevis. Ved at bruge viden fra produktsfæren og fra $I \times S^p$ og gennemgå alle tilfældene fås, at $R^r(F_i, F_j)F_k = 0$ for $i \neq j \neq k$, dette udelades. Vi har også at $\varphi_i = \varphi$ for $0 < i \leq p$ og $\varphi_i = \psi$ for $p < i \leq q$. Med dette i baghånden følger det fra sætning 2.2.9 at $\mathfrak{R}$ har de påståede værdier. Man skal undervejs benytte at $K_p(S) = \frac{1}{\varphi^2}$ og $K_p(S) = \frac{1}{\psi^2}$ på henholdsvis S^p og S^q med metrik givet ved henholdsvis $\varphi^2(r) g_{S^p}$ og $\psi^2(r) g_{S^q}$.

Beviset for at Riccikrumninger har de påståede værdier kører på præcis samme måde som ved det rotationssymmetriske produkt. Detaljerne udelades. □

Bemærkning 2.3.8. I de sidste tre tilfælde vidste vi uden at foretage beregninger, at $\mathfrak{R}$ og Ric var diagonal. Værdien af $\mathfrak{R}$ giver et estimat på snitkrumningen. Disse to udsagn følger direkte fra proposition 1.2.7.

Nu kan vi formulere de nødvendige og tilstrækkelige betingelser for at $I \times S^1 \times S^2$ er en model for en sfærisk symmetrisk rumtid. Dette formuleres i hovedsætningen.

Sætning 2.3.9. *Produktet $I \times S^1 \times S^2$ med metrik $g = dr \otimes dr + \varphi^2(r)\tilde{g}_{S^1} + \psi^2(r) g_{S^2}$ er en løsning til feltligningen i vacuum hvis og kun hvis φ, ψ opfylder differentialligningerne 2.1-2.3 og $\tilde{g}_{S^1} = -g_{S^1}$.*

Bevis. $I \times S^1 \times S^2$ er klart sammenhængende og fire-dimensional.

For at give $I \times S^1 \times S^2$, $g = dr \otimes dr + \varphi^2(r)\tilde{g}_{S^1} + \psi^2(r)g_{S^2}$ en rum-tidsstruktur skal metriktensoren være Lorentz. Da $\tilde{g}_{S^1}$ er en Lorentz metrik, bliver g også til en Lorentzmetrik.

$I \times S^1 \times S^2$ skal være tidsorienteret. Ved at vælge en tidsorientering på S^1 med metrik $\tilde{g}_{S^1}$ Lorentz får man tidsorienteret $I \times S^1 \times S^2$. Hvis $V \in \mathfrak{X}(S^1)$ er et timelike vektorfelt vil vektoren $(0, V, 0) \in \mathfrak{X}(I \times S^1 \times S^2)$ være et timelike vektorfelt. Da V giver en tidsorientering på S^1, vil $(0, V, 0)$ også give en tidsorientering på $I \times S^1 \times S^2$.

For at produktet skal opfylde feltligningen skal $I \times S^1 \times S^2$ være Riccifladt. En nødvendig og tilstrækkelig betingelse for, at dette er tilfældet, fås ved at sætte $p = 1$ og $q = 2$ i sætning 2.3.7. Man får, at φ, ψ skal opfylde følgende ligninger

$$-\frac{\ddot{\varphi}}{\varphi} - 2\frac{\ddot{\psi}}{\psi} = 0 \tag{2.1}$$

$$-\frac{\ddot{\varphi}}{\varphi} - 2\frac{\dot{\varphi}\dot{\psi}}{\varphi\psi} = 0 \tag{2.2}$$

$$-\frac{\ddot{\psi}}{\varphi} + \frac{1 - \dot{\psi}^2}{\psi^2} - \frac{\dot{\varphi}\dot{\psi}}{\varphi\psi} = 0 \tag{2.3}$$

Det er uden for rammerne af dette projekt at komme ind på betingelser for, at der eksisterer en løsning til disse differentialligninger. □

Bemærkning 2.3.10. I [ONe83, Chapter 13] er der anvendt en alternativ tilgangsvinkel til problemet. Resultatet derfra citeres uden bevis og, vi vil blot skitsere en transformationsmetode mellem resultatet her og det, der er givet i [ONe83, Chapter 13].

Det vises i [ONe83, Chapter 13, Lemma 1] at produktet

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times S^2$$

med metriktensor givet ved

$$g = -\left(1 - \frac{2M}{R}\right) dt \otimes dt + \left(1 - \frac{2M}{R}\right) dR \otimes dR + R^2 g_{S^2}, \tag{2.4}$$

hvor $M > 0$ er en konstant og $R = \mathrm{proj}_{\mathbb{R}^+}$, er Riccifladt. Metrikken givet i (2.4) er den, man normalt kalder *Schwarzschild metrikken*.

Transformationen mellem de to situationer er givet ved

$$\psi(r) = R, \quad dR = \dot{\psi} dr,$$

hvilket giver følgende ligninger

$$\varphi^2(r) = -\left(1 - \frac{2M}{\psi(r)}\right), \quad \left(1 - \frac{2M}{\psi(r)}\right)\dot{\psi}^2 = 1. \tag{2.5}$$

Litteratur

[Pet97] Petersen, P.: Riemannian Geometry; Springer Verlag, 1997.

[ONe83] O'Neill, B. : Semi-Riemannian Geometry, With Application to Relativity; Academic Press, 1983.

[Dup93] Dupont, J. L.: Differential Geometry; Aarhus University Press, 1993.

[War83] Warner, F.: Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups; Springer Verlag, 1983.

[MT97] Madsen, I., Tornehave, J.: From Calculus to Cohomology; Cambridge University Press, 1997.